Combinatória e Probabilidade

do básico ao avançado — 15 questões da Coleção Enem

Como ler. Cada página tem duas colunas: à esquerda, a questão do Enem como caiu; à direita, o resumo do conteúdo que a resolve — conceito e fórmula — para a revisão. As questões estão em dois blocos, Combinatória e depois Probabilidade, cada um em ordem crescente de dificuldade.

Os níveis. Os cinco níveis são relativos ao próprio tema: dividem em quintis os 52 itens válidos de Combinatória e Probabilidade da Coleção Enem (2012–2025, a ≥ 1), com cortes em 687,6, 728,8, 769,1 e 823,3 na escala 500 + 100·b (parâmetros publicados pelo Inep). Na escala da prova, esses itens se distribuem em 1 muito fácil, 5 fáceis, 16 medianos, 19 difíceis e 11 muito difíceis — como o tema é dos mais difíceis da prova, o nível 1 já corresponde à faixa mediana do Enem (a única questão «muito fácil» do tema é de 2015). No cabeçalho de cada questão, a dificuldade publicada e a faixa ❶–❺ da Coleção (cortes 580 / 660 / 740 / 820).

As 15 questões

Nº	Bloco	Nível	Enem	Hab.	Dificuldade	a	Modelo da questão
01	Combinatória	1 · Básico	2012	H4	607,1	2,35	Princípio fundamental da contagem
02	Combinatória	1 · Básico	2021	H2	687,5	2,75	Combinação simples
03	Combinatória	2 · Fundamental	2020	H2	717,7	1,57	Permutação com repetição (anagramas, caminhos)
04	Combinatória	3 · Intermediário	2024	H2	742,5	3,12	Combinação por complementar ou soma de casos
05	Combinatória	3 · Intermediário	2019	H3	761,2	2,46	Partição em grupos (duplas)
06	Combinatória	4 · Avançado	2018	H2	797,5	1,79	Arranjo simples
07	Combinatória	5 · 900+	2022	H5	833,6	2,94	Princípio fundamental da contagem
08	Probabilidade	1 · Básico	2023	H28	636,8	2,70	Casos favoráveis sobre casos possíveis (sorteio direto)
09	Probabilidade	2 · Fundamental	2025	H28	690,0	3,13	Probabilidade como proporção lida em gráfico ou infográfico
10	Probabilidade	2 · Fundamental	2019	H28	691,2	2,59	Condicional invertida: $P(A\|B) = P(A \cap B)/P(B)$
11	Probabilidade	3 · Intermediário	2023	H28	750,5	2,69	Sorteio em duas etapas: a segunda depende da primeira
12	Probabilidade	4 · Avançado	2013	H28	769,3	3,17	Condicional em tabela ou diagrama: $P(B\|A) = n(A \cap B)/n(A)$
13	Probabilidade	4 · Avançado	2021	H30	788,5	3,77	Pelo menos um: $1 - (1 - p)^n$
14	Probabilidade	5 · 900+	2015	H28	887,9	3,41	Pelo menos um: $1 - (1 - p)^n$
15	Probabilidade	5 · 900+	2015	H30	951,7	1,49	Árvore de probabilidades e probabilidade total

Escolha: discriminação (todas com a ≥ 1,49; mediana 2,70), recorrência do modelo na prova e diversidade — nenhum modelo se repete, exceto o PFC (básico e avançado) e o «pelo menos um» (com n a determinar e com complementar), que são os dois mais cobrados.

COMBINATÓRIA

NÍVEL 1 · BÁSICO dificuldade até 687,6 (quintil do tema)

Questão 01 (H4 | 2012 | 607,1) ①②③④⑤

O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

E) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Combinatória · nível 1

Princípio fundamental da contagem (PFC). Se uma escolha pode ser feita de m maneiras e, feita essa escolha, uma segunda pode ser feita de n maneiras, as duas escolhas, em sequência, podem ser feitas de $m \cdot n$ maneiras. Vale para quantas etapas houver: o total de possibilidades é o produto das opções de cada etapa.

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$$

Use o PFC sempre que o resultado for uma sequência de escolhas independentes (um objeto, um personagem, um cômodo). Se as escolhas se influenciam (não repetir), reduza as opções da etapa seguinte.

6p. (PESS) · 5p. (OBJ) · 9p. (CÔM)

$= 6 \cdot 5 \cdot 9 = 30 \cdot 9 = 270$ p.

Questão 02 (H2 | 2021 | 687,5) ①②③④⑤

Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

A) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$.

B) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$.

C) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$.

D) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$.

E) $\frac{21!}{7!14!}$.

1ª decisão: quais 2 tipos de tecido entre 6 disponíveis?

$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$

e

2ª decisão: quais 5 tipos de pedras entre 15 disp.?

$C_{15,5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!}$

X

Combinatória · nível 1

Combinação simples. Escolher p elementos entre n quando a ordem não importa (uma equipe, um conjunto de tecidos, um grupo de pedras):

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Escolhas feitas em conjuntos diferentes se combinam pelo PFC: o total é o produto das combinações. Teste da ordem: trocar a ordem dos escolhidos gera o mesmo resultado? Então é combinação. Gera um resultado diferente? Então é arranjo.

NÍVEL 2 · FUNDAMENTAL dificuldade 687,6 a 728,8 (quintil do tema)

Questão 03 (H2 | 2020 | 717,7) ①②③④⑤

Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

A) $9!$.

B) $4!\,5!$.

C) $2\cdot 4!\,5!$.

D) $\frac{9!}{2}$.

● $\frac{4!\,5!}{2}$.

¡AMPOTTER
Vogais: {i, A, O, E}
Consoantes: {M, P, T, T, R}
letras T
$PR_5^2 = \frac{5!}{2!}$
4p. C 3p. C 2p. C 1p. C
$P_4 = 4!$
Resp: $4! \cdot \frac{5!}{2!} = \frac{4!\,5!}{2}$

Combinatória · nível 2

Permutação com repetição (anagramas). O número de ordenações de n objetos em que um deles se repete α vezes, outro β vezes etc. é

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\cdots}$$

Com restrição de posição (vogais e consoantes intercaladas, letras que ficam juntas), resolva em etapas: conte os padrões de posições possíveis, permute cada grupo dentro das suas posições e multiplique tudo pelo PFC.

NÍVEL 3 · INTERMEDIÁRIO dificuldade 728,8 a 769,1 (quintil do tema)

Questão 04 (H2 | 2024 | 742,5) ①②③④⑤

Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas.

3 CARDIOLOGISTAS OU +

A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é

A) $\frac{7!}{4!}\times\frac{6!}{4!}$

B) $\frac{7!}{3!\times 4!}\times\frac{6!}{2!\times 4!}$

C) $\frac{7!}{3!\times 4!}+\frac{6!}{2!\times 4!}+\frac{5!}{1!\times 4!}$

D) $\left(\frac{7!}{3!\times 4!}+\frac{6!}{2!\times 4!}\right)\times\left(\frac{7!}{4!\times 3!}+\frac{6!}{1!\times 5!}\right)\times\left(\frac{7!}{5!\times 2!}+\frac{6!}{0!\times 6!}\right)$

● $\left(\frac{7!}{3!\times 4!}\times\frac{6!}{2!\times 4!}\right)+\left(\frac{7!}{4!\times 3!}\times\frac{6!}{1!\times 5!}\right)+\left(\frac{7!}{5!\times 2!}\times\frac{6!}{0!\times 6!}\right)$

5 médicos
3 cardiol. e 2 neuro. $C_{7,3}=\frac{7!}{3!\,4!}\times C_{6,2}=\frac{6!}{2!\,4!}$
ou
4 cardiol. e 1 neuro + $C_{7,4}=\frac{7!}{4!\,3!}\times C_{6,1}=\frac{6!}{1!\,5!}$
ou
5 cardiol. e 0 neuro. + $C_{7,5}=\frac{7!}{5!\,2!}\times C_{6,0}=\frac{6!}{0!\,6!}$

Combinatória · nível 3

Combinação com «pelo menos». Quando a equipe exige um mínimo de um tipo, separe os casos possíveis (exatamente 3, exatamente 4, exatamente 5…), conte cada um por combinações multiplicadas pelo PFC e some os casos, que são disjuntos:

$$\sum_{k\geq k_{\min}} C_{a,k}\cdot C_{b,p-k}$$

Alternativa: contar pelo complementar, total $C_{a+b,p}$ menos os casos proibidos. Erro clássico: escolher primeiro os «obrigatórios» e completar livremente com os restantes, o que conta a mesma equipe mais de uma vez.

1p-

P/C1: $C_{6,1} = 6p$.
P/C2: $C_{5,1} = 5p$.
P/ 2 duplas: $\frac{C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{P_2} = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3p$.
90p.

1 ÉTODO DEST. ⇒ 4 duplas (sl nost.) — 1 dupla de canhotos + 3 duplas de destros

$\frac{C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{P_4} - 1 \cdot \frac{C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{P_3}$

$= 105p. - 15p.$

$= 90p.$

Questão 05 (H3 | 2019 | 761,2) ①②③④⑤

Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

8 amigos: D1, D2, D3, D4, D5, D6, C1, C2

A) 69
B) 70
C) 90
D) 104
E) 105

1ª dupla: C1 $\frac{6p.}{\text{destros}} = 6p.$ ✔

2ª dupla: C2 $\frac{5p.}{\text{destros}} = 5p.$ ✔

3ª dupla: 2 destros ⇒ $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6p.$

4ª dupla: 2 destros ⇒ $C_{2,2} = \frac{2!}{2!0!} = 1p.$

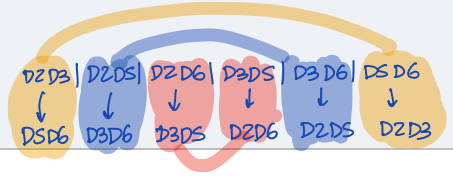
Resp: $6 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot 1}{2} = 30 \cdot 3 = 90p.$

Combinatória · nível 3

Partição em grupos. Dividir n elementos em k grupos indistinguíveis de m elementos cada ($n = k\,m$):

$$\frac{n!}{(m!)^k \cdot k!}$$

Divide-se por $m!$ em cada grupo porque a ordem dentro do grupo não importa e por $k!$ porque a ordem dos grupos não importa (as duplas não têm nome). Com uma proibição («nenhuma dupla com dois canhotos»), conte todas as partições e subtraia as que violam a regra.



NÍVEL 4 · AVANÇADO dificuldade 769,1 a 823,3 (quintil do tema)

Questão 06 (H2 | 2018 | 797,5) ①②③④⑤

O salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev.2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

A) A_{10}^4
B) C_{10}^4
C) $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$
D) $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$
E) $C_4^2 \times C_6^2$

escolha dos dois compactos
escolha das duas caminhotes
os estandes dos compactos
os estandes das caminhotes

Observação: outra resposta possível seria $A_{4,2} \cdot A_{6,2}$

Combinatória · nível 4

Arranjo simples. Escolher p elementos entre n quando a ordem importa (cada posição, estande ou cargo é diferente):

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = n\,(n-1)\cdots(n-p+1)$$

Arranjo é combinação seguida de permutação dos escolhidos: $A_{n,p} = C_{n,p} \cdot p!$. Escolhas de categorias diferentes (compactos e caminhonetes) se multiplicam pelo PFC. Quando a posição dentro de um mesmo lugar é irrelevante, não permute aí.

C1 C2 C3 C4 (compactos)

ENTRADA

COMP.	CAMIN.
4p.	6p.

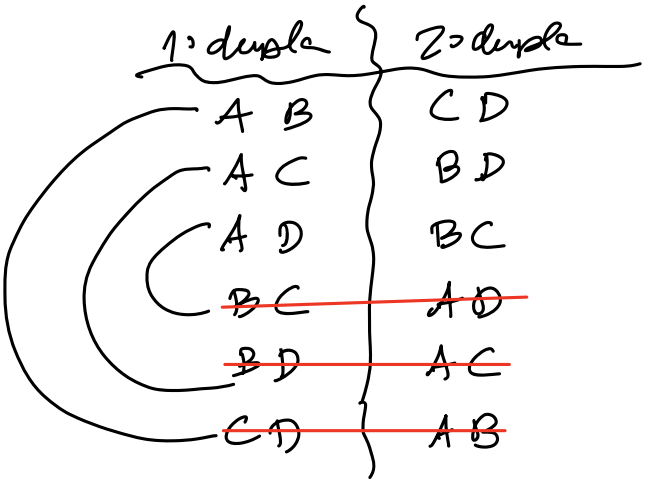
CENTRAL

COMP.	CAMIN.
3p.	5p.

Resp: $4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 = 360p.$

A B C D

2 duplas



PARTIÇÃO NÃO-ORDENADA

$$\frac{C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{P_2}$$

X X | X X

INDEVIDA!

5 amigos: A B C D E

1 dupla e 1 trio?

$C_{5,2} \cdot C_{3,3}$

DE ABC

NÃO DIVIDO! PORQUE $2 \neq 3$

8 amigos: AB|CD|EF|GH

4 duplas?

$$\frac{C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{P_4}$$

10 amigos: 2 duplas e 2 trios?

$$\frac{C_{10,2} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,3} \cdot C_{3,3}}{P_2 \cdot P_2}$$

P_2: 2 duplas; P_2: 2 trios

NÍVEL 5 · 900+ dificuldade acima de 823,3 (quintil do tema)

Questão 07 (H5 | 2022 | 833,6) ①②③④⑤

Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

A) 8.
B) 9.
C) 11.
D) 18.
E) 24.

A: CENTRAL (2p.) ✓ x
B: RODA (2p.) ✓ x
C: BANCO (2p.) ✓ x
8p.

OPCIONAIS: 8p.
0: { } 1p.
1: {A}, {B}, {C} 3p.
2: {A,B}, {A,C}, {B,C} 3p.
3: {A,B,C} 1p.

MAIS DE 1000 CONF.

Combinatória · nível 5

Subconjuntos e PFC. Um conjunto com n opcionais admite 2^n escolhas, porque cada opcional pode ser incluído ou não (inclusive nenhum e todos):

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdots 2^k$$

Quando a contagem tem uma incógnita (o número de cores) e uma meta («mais de 1 000»), escreva o produto, monte a inequação e tome o menor inteiro que a satisfaz; «mais de» é estrito.

7p. (MODELO) · 2p. (MOTOR) · 8p. (OPCIONAIS) · k_p (COR) — k CORES

$7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot k > 1000$

$14 \cdot 8 \cdot k > 1000$

$112k > 1000$

$k > \frac{1000}{112} = 8,\ldots$

$8 \times 112 = 896$

$9 \times 112 = 990 + 18 > 1000$

$k \geq 9$

PROBABILIDADE

NÍVEL 1 · BÁSICO dificuldade até 687,6 (quintil do tema)

Questão 08 (H28 | 2023 | 636,8) ①②③④⑤

No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados.

Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{2}{9}$

E) $\frac{3}{8}$

200 do 1º ano ① ⇒ 200 cartões
150 do 2º ano ② ⇒ 300 cartões
100 do 3º ano ③ ⇒ 300 cartões

$P(\text{cartão 3º ano}) = \frac{300}{800} = \frac{3}{8}$

Probabilidade · nível 1

Probabilidade clássica. Em um espaço amostral com resultados igualmente prováveis,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

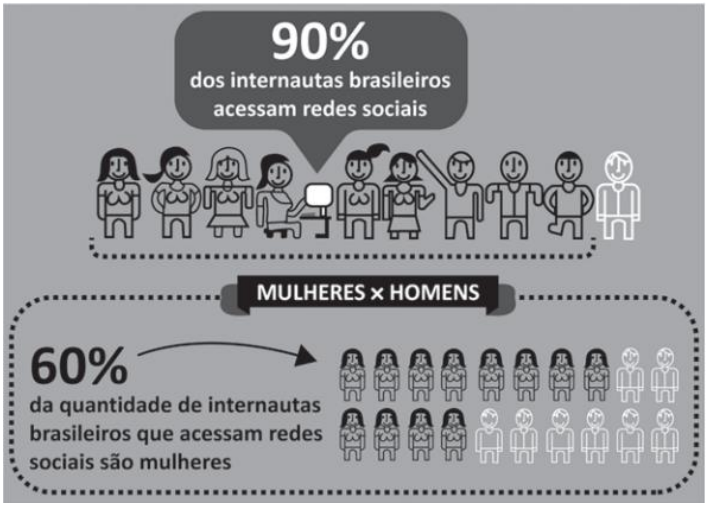
O espaço amostral é o conjunto do que é sorteado de fato (cartões, bolas, bilhetes), não o das pessoas: quem tem mais cartões na urna tem mais chance. Conte o total de cartões, conte os favoráveis e simplifique a fração.

NÍVEL 2 · FUNDAMENTAL dificuldade 687,6 a 728,8 (quintil do tema)

Questão 09 (H28 | 2025 | 690,0) ①②③④⑤

A reportagem de uma revista abordou o uso de redes sociais pelos internautas brasileiros. Alguns dos dados apurados pela reportagem estão apresentados no infográfico.

Perfil dos brasileiros nas redes sociais



Disponível em: http://revistagalileu.globo.com. Acesso em: 22 out. 2015 (adaptado).

Segundo os dados do infográfico, ao se escolher aleatoriamente um internauta brasileiro no período ao qual se refere a reportagem, a probabilidade de ele ser um homem que acessa alguma rede social é

(A) $\frac{30}{90}$
(B) $\frac{36}{100}$
(C) $\frac{40}{100}$
(D) $\frac{40}{90}$
(E) $\frac{46}{90}$

$\frac{90}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{36}{100}$

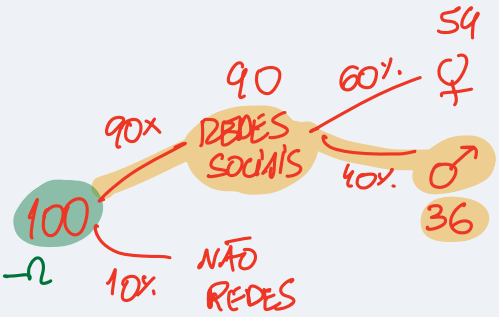
P(acessam as redes sociais) · P(♂ sabendo que usa rede social)

Probabilidade · nível 2

Probabilidade como frequência relativa. Quando os dados vêm em porcentagens (pesquisa, infográfico, tabela), a probabilidade de escolher ao acaso alguém com uma característica é a própria proporção dessa característica no total.

$$P = p_1 \cdot p_2$$

«Parte de uma parte» multiplica: a fração dos homens que acessam redes sociais, dentro da fração de homens, é o produto das duas porcentagens. Leia o infográfico perguntando sempre «porcentagem de quem?».



Questão 10 (H28 | 2019 | 691,2) ①②③④⑤

Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas.

Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta?

(A) 0,0500
(B) 0,1000
(C) 0,1125
(D) 0,3125
(E) 0,5000

Probabilidade · nível 2

Probabilidade condicional. A probabilidade de A dado que B ocorreu é

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

«Dado que» muda o espaço amostral: o denominador passa a ser só B. Quando o enunciado dá as condicionais no sentido contrário ao pedido (dá $P(F \mid I)$ e pede $P(I \mid F)$), monte a árvore: $P(I \cap F) = P(I) \cdot P(F \mid I)$ e $P(F)$ é a soma de todos os ramos que terminam em F (probabilidade total). Depois divida.

NÍVEL 3 · INTERMEDIÁRIO dificuldade 728,8 a 769,1 (quintil do tema)

Questão 11 (H28 | 2023 | 750,5) ①②③④⑤

Em um colégio público, a admissão no primeiro ano se dá por sorteio. Neste ano há 55 candidatos, cujas inscrições são numeradas de 01 a 55. O sorteio de cada número de inscrição será realizado em etapas, utilizando-se duas urnas. Da primeira urna será sorteada uma bola, dentre bolas numeradas de 0 a 9, que representará o algarismo das unidades do número de inscrição a ser sorteado e, em seguida, da segunda urna, será sorteada uma bola para representar o algarismo das dezenas desse número. Depois do primeiro sorteio, e antes de se sortear o algarismo das dezenas, as bolas que estarão presentes na segunda urna serão apenas aquelas cujos números formam, com o algarismo já sorteado, um número de 01 a 55.

As probabilidades de os candidatos de inscrição número 50 e 02 serem sorteados são, respectivamente,

- **A** $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{60}$.
- **B** $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{50}$.
- **C** $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{10}$.
- **D** $\frac{1}{55}$ e $\frac{1}{54}$.
- **E** $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{100}$.

Número 50 ⇒ Sortear o 0 na 1: uma ⇒ 1/10 e Sortear o 5 na 2: uma ⇒ 1/5

{0,1,...,9} {1,2,3,4,5}

10 20 30 40 50

Resp: $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{50}$

02 12 22 32 42 52

Número 02 ⇒ Sortear o 2 na 1: ⇒ 1/10 e Sortear o 0 na 2: ⇒ 1/6

$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{60}$

{0,1,2,3,4,5}

Probabilidade · nível 3

Sorteio em etapas. Quando o segundo sorteio depende do resultado do primeiro,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

A cada etapa o espaço amostral é recontado com o que sobrou (ou com o que a etapa anterior permite). Para um resultado que pode vir por caminhos diferentes, some as probabilidades dos caminhos. Desenhar a árvore evita o erro mais comum: manter o denominador da primeira etapa na segunda.

NÍVEL 4 · AVANÇADO dificuldade 769,1 a 823,3 (quintil do tema)

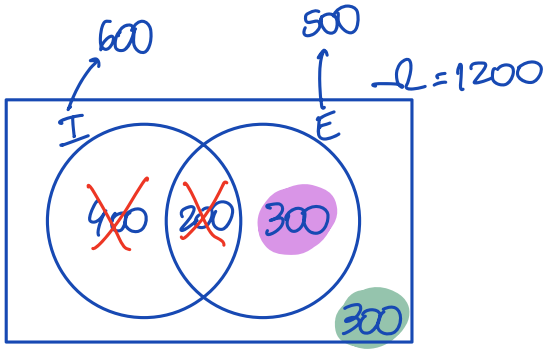
Questão 12 (H28 | 2013 | 769,3) ①②③④⑤

Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.

Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

- **A** $\frac{1}{2}$
- **B** $\frac{5}{8}$
- **C** $\frac{1}{4}$
- **D** $\frac{5}{6}$
- **E** $\frac{5}{14}$



P(ESPANHOL / NÃO FALA INGLÊS) = 300/(300+300) = 300/600 = 1/2

Probabilidade · nível 4

Condicional com diagrama. Com dois conjuntos, organize os dados no diagrama de Venn antes de calcular:

$$n(I \cup E) = n(I) + n(E) - n(I \cap E)$$

$$n(\text{nenhum}) = n(\Omega) - n(I \cup E)$$

Daí sai a interseção e cada região («só inglês», «só espanhol»). A condicional é a razão entre regiões: $P(E \mid \text{não } I) = \frac{n(E \cap I')}{n(I')}$, em que I' é o complementar de I (quem não fala inglês).

ACERTAR PELO MENOS 1 ERRAR TODOS

Questão 13 (H30 | 2021 | 788,5) ①②③④⑤

O organizador de uma competição de lançamento de dardos pretende tornar o campeonato mais competitivo. Pelas regras atuais da competição, numa rodada, o jogador lança 3 dardos e pontua caso acerte pelo menos um deles no alvo. O organizador considera que, em média, os jogadores têm, em cada lançamento, $\frac{1}{2}$ de probabilidade de acertar um dardo no alvo.

A fim de tornar o jogo mais atrativo, planeja modificar as regras de modo que a probabilidade de um jogador pontuar em uma rodada seja igual ou superior a $\frac{9}{10}$. Para isso, decide aumentar a quantidade de dardos a serem lançados em cada rodada.

Com base nos valores considerados pelo organizador da competição, a quantidade mínima de dardos que devem ser disponibilizados em uma rodada para tornar o jogo mais atrativo é

A) 2.
B) 4.
C) 6.
D) 9.
E) 10.

Probabilidade · nível 4

Pelo menos um em n tentativas. Com tentativas independentes e probabilidade p de sucesso em cada uma,

$$P(\text{pelo menos um}) = 1 - (1-p)^n$$

Para atingir uma meta M, resolva $1-(1-p)^n \geq M$, isto é, $(1-p)^n \leq 1-M$, testando os valores de n das alternativas em ordem crescente: o menor n que satisfaz é a resposta. Potências de frações decrescem rápido; não é preciso logaritmo.

NÍVEL 5 · 900+ dificuldade acima de 823,3 (quintil do tema)

Questão 14 (H28 | 2015 | 887,9) ①②③④⑤

Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

A) 23,7%.
B) 30,0%.
C) 44,1%.
D) 65,7%.
E) 90,0%.

Probabilidade · nível 5

Complementar e independência. O complementar de «pelo menos um» é «nenhum». Para eventos independentes, a probabilidade de nenhum ocorrer é o produto das probabilidades de cada um não ocorrer:

$$P(\text{pelo menos um}) = 1 - P(\text{nenhum})$$

$$P(\text{nenhum}) = (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)$$

Quando todos têm a mesma probabilidade p, fica $1-(1-p)^n$. Reconheça o padrão em frases como «respondida por qualquer um», «ao menos um acerta», «pelo menos uma falha».

Questão 15 (H30 | 2015 | 951,7) ①②③④⑤

O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

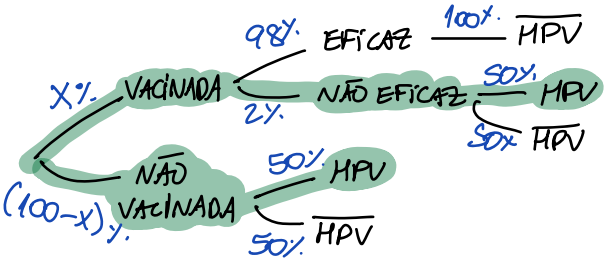
- Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.
- Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.
- Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.
- Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.
- Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virushpv.com.br. Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado).

A proposta implementada foi a de número

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.



Probabilidade · nível 5

Probabilidade total e árvore. Se o evento D pode ocorrer por dois caminhos (vacinado ou não), sua probabilidade é a soma dos caminhos:

$$P(D) = P(D \cap V) + P(D \cap V')$$

$$P(D \cap V) = P(V)\,P(D \mid V)$$

Uma proteção de eficácia e reduz a probabilidade do evento ao fator $(1-e)$: $P(D \mid V) = (1-e) \cdot P(D \mid V')$. Com a cobertura v como incógnita, a condição «no máximo x» vira uma inequação em v; a resposta é a proposta que a satisfaz com o menor valor.

$P(HPV) \leq 5{,}9\%$

$\frac{x}{100} \cdot \frac{2}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{(100-x)}{100} \cdot \frac{50}{100} \leq \frac{5{,}9}{100} \times 100 \times 100$

$(\times 100^2)$

$\frac{x}{100 \cdot 100} + \frac{5000 - 50x}{100 \cdot 100} \leq \frac{590}{100 \cdot 100}$

$x + 5000 - 50x \leq 590$

$-49x \leq -4410 \quad (\times -1)$

$49x \geq 4410$

$x \geq \frac{4410}{49} = \frac{4900}{49} - \frac{490}{49}$

$= 100 - 10$

$= 90$

$x \geq 90\%$

GABARITOS

Questão	Bloco	Nível	Enem	Hab.	Gabarito	Dificuldade	Faixa
01	Combinatória	1	2012	H4	A	607,1	❷
02	Combinatória	1	2021	H2	A	687,5	❸
03	Combinatória	2	2020	H2	E	717,7	❸
04	Combinatória	3	2024	H2	E	742,5	❹
05	Combinatória	3	2019	H3	C	761,2	❹
06	Combinatória	4	2018	H2	C	797,5	❹
07	Combinatória	5	2022	H5	B	833,6	❺
08	Probabilidade	1	2023	H28	E	636,8	❷
09	Probabilidade	2	2025	H28	B	690,0	❸
10	Probabilidade	2	2019	H28	E	691,2	❸
11	Probabilidade	3	2023	H28	A	750,5	❹
12	Probabilidade	4	2013	H28	A	769,3	❹
13	Probabilidade	4	2021	H30	B	788,5	❹
14	Probabilidade	5	2015	H28	D	887,9	❺
15	Probabilidade	5	2015	H30	A	951,7	❺

QUESTÕES AUTORAIS · Combinatória e Probabilidade

Questão 01 (6º Simulado Mente Matemática 2025)

Para estimular a prática de atividades físicas durante as férias, uma escolinha de futebol promoveu o seguinte desafio: a cada dia de treino frequentado, o aluno receberia uma cota para participar de um sorteio, cujo prêmio seria uma viagem.

O desafio teve duração de 30 dias e os 20 alunos dessa escola de futebol acumularam cotas conforme sua frequência:

- 8 alunos treinaram todos os dias;
- 5 alunos faltaram 2 dias;
- 7 alunos faltaram 5 dias.

Sabe-se que Pedro participou do desafio, tendo sido um dos alunos que deixou de treinar em 2 dias.

Considerando que o sorteio será realizado entre todas as cotas acumuladas pelos participantes do desafio, qual é a probabilidade de Pedro ser o vencedor?

A) $\frac{5}{140}$
B) $\frac{5}{555}$
C) $\frac{28}{140}$
D) $\frac{28}{555}$
E) $\frac{140}{555}$

Questão 02 (4º Simulado Mente Matemática 2023)

Para possibilitar ligações telefônicas entre diferentes regiões urbanas de certo país, serão criados códigos regionais, os quais deverão ser digitados antes do número de telefone desejado para que a ligação seja efetuada com sucesso. Cada código será único para cada região e obedecerá a três regras:

- regra I: o código regional será composto por três algarismos, dentre os algarismos do sistema decimal (0 a 9);
- regra II: o primeiro algarismo, à esquerda, do código regional, será sempre 0 ou 9;
- regra III: cada algarismo subsequente do código regional deverá ser sempre menor do que ou igual ao algarismo à sua esquerda.

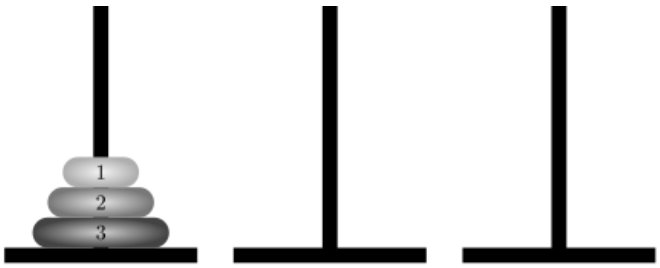
Alguns exemplos de códigos possíveis são: 998, 953 e 911.

Obedecendo às regras estabelecidas, quantos códigos regionais poderão ser criados no país?

A) 28
B) 55
C) 56
D) 110
E) 180

Questão 03 (3º Simulado Mente Matemática 2021)

Torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático inspirado em uma lenda hindu: monges de um templo deveriam transferir discos de ouro de uma haste de diamante a outra, utilizando uma terceira de auxiliar, sem nunca colocar um disco de ouro maior sobre um menor e movimentando um disco por vez, de uma haste a outra. A figura mostra uma torre de Hanói convencional, na qual se encontravam três discos de ouro, de diferentes dimensões, em uma das três hastes.



Caso os três discos da figura pudessem ser posicionados livremente nas três hastes – mesmo os maiores sobre os menores –, a quantidade de configurações distintas para o posicionamento destes discos na torre de Hanói seria igual a

A) 5.
B) 9.
C) 10.
D) 60.
E) 120.

Questão 04 (6º Simulado Mente Matemática 2025)

Uma pessoa, ao fazer um teste rápido para detectar a presença de um vírus, é informada que, em média, a cada 20 testes com resultado positivo, um apresenta resultado falso positivo, indicando a presença do vírus em uma pessoa saudável.

Desconfiada após receber um resultado positivo, essa pessoa decide repetir o mesmo teste quantas vezes forem necessárias para que, caso receba apenas resultados positivos, a probabilidade de que sejam todos eles falsos positivos, do primeiro ao último teste realizado, seja inferior a 0,1%. Considere que os resultados dos testes sejam independentes entre si.

A quantidade mínima de novos testes que essa pessoa deverá realizar é igual a

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 5.
E) 20.

Questão 05 (2º Simulado Mente Matemática 2023)

Em uma competição, cada um dos dez tiros dados por um atirador na primeira fase, realizada em dois dias, recebe como pontuação um número inteiro de 0 a 15, com cada pontuação sendo equiprovável e independente das pontuações anteriores.

No primeiro dia de competição, um atirador obteve uma pontuação média igual a 8,0 em sete tiros realizados.

No segundo dia de competição, para que consiga se classificar para a segunda fase, o atirador precisará alcançar uma pontuação média igual ou superior a 10,0 pontos, considerados os dez tiros da primeira fase.

A probabilidade de este atirador se classificar para a segunda fase da competição é igual a

A $\frac{1}{16^3}$.

B $\frac{2}{16^3}$.

C $\frac{3}{16^3}$.

D $\frac{4}{16^3}$.

E $\frac{7}{16^3}$.

GABARITOS

Questão	Origem	Gabarito
01	6º Simulado 2025	**D**
02	4º Simulado 2023	**C**
03	3º Simulado 2021	**D**
04	6º Simulado 2025	**B**
05	2º Simulado 2023	**D**